IX edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2021/22

I etap

1. Rozstrzygnij, która liczba jest większa :

$$\frac{1\overbrace{00\ldots0}^{n-1}1}{1\underbrace{00\ldots0}_{n}1} \quad \text{czy} \quad \frac{1\overbrace{00\ldots0}^{n}1}{1\underbrace{00\ldots0}_{n+1}1}$$

2. Jeżeli p, q, r są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $pqr=1$, to

$$\frac{1+p}{1+p+pq}+\frac{1+q}{1+q+qr}+\frac{1+r}{1+r+rp}=2$$

3. Z końców dowolnego odcinka AB prowadzimy dwa równoległe do siebie odcinki AA_1 i BB_1 takie, że $|AA_1|=a$ i $|BB_1|=b$ .Przez punkt C_1 przecięcia się odcinków BA_1 i AB_1 prowadzimy odcinek CC_1 równoległy do BB_1, gdzie C jest punktem przecięcia się odcinków AB i CC_1.Udowodnij, że $\frac{1}{|CC_1|}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

4. Wykaż, że jeśli $a,b>0$ i $a+b=1$,to $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$

5. Podłoga i sufit. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej x spełniona jest

równość $\left\lceil\frac{2x+1}{2}\right\rceil-\left\lceil\frac{2x+1}{4}\right\rceil+\left\lfloor\frac{2x+1}{4}\right\rfloor=x$ gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej *a:*

$\lfloor a\rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą *a*, natomiast

$\lceil a\rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą *a*

Termin oddania 02.11.2021.