X edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2022/23

II etap

1.Wykazać, że dla każdych $a, b, c \in R_+$ takich, że $a+b+c=1$ prawdziwa jest nierówność : $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$

2. Wykaż, że suma: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ jest liczbą naturalną.

3. Proste zawierające cięciwy $AB\ i\ CD$ okręgu $o(O,r)$ przecinają się w punkcie M nie należącym do okręgu. Wykaż, że $|AM| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$
(jest to tzw. twierdzenie o siecznych)

4. Znajdź wszystkie trójkąty pitagorejskie (trójkąty prostokątne o długościach boków wyrażających się liczbami naturalnymi) ,w których jeden z boków ma długość 12.

5. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad dla\ n \in N_+ \end{cases}$$

Ustal, czy liczba F_{2022} jest parzysta.

Termin oddania 30.11.2022