



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

**XI edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2023/24

**I etap**

**1.** Wykaż, że liczba

$$2023^{2024} - 2 \cdot 2023^{2023} + 2023^{2022}$$

jest podzielna przez 2022.

**2.** Udowodnij, że jeżeli  $AK$  i  $BL$  są wysokościami trójkąta ostrokątnego  $ABC$ , to  $\sphericalangle KLC = \sphericalangle ABC$  oraz  $\sphericalangle LKC = \sphericalangle BAC$ .

**3.** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^{2023} + 2y^{2023} - z^{2023} = 4 \\ 2y^{2023} + 2z^{2023} - x^{2023} = 22 \\ 2z^{2023} + 2x^{2023} - y^{2023} = 16 \end{cases}$$

**4.** Środkowa poprowadzona na przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego dzieli go na dwa trójkąty o obwodach  $p_1$  i  $p_2$ . Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego.

**5.** Liczby  $a, b, c$  są dodatnie. Wykaż, że  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$