UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

XI edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2023/24

III etap

1. Udowodnij, że jeśli dodatnie liczby *a, b, c* spełniają warunki:

$$b = 2023^{\frac{1}{1-\log_{2023} a}} \quad \text{oraz} \quad c = 2023^{\frac{1}{1-\log_{2023} b}}, \text{ to} \quad a = 2023^{\frac{1}{1-\log_{2023} c}}.$$

2. Symbolem $m!!$ oznaczamy iloczyn wszystkich liczb nieparzystych od 1 do *m*, jeśli m jest liczbą nieparzystą, a iloczyn wszystkich liczb parzystych od 2 do *m*, gdy m jest liczbą parzystą:

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)(2n-1)$$

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)2n$$

Wykaż, że dla każdej liczby $n \in N_+$ zachodzi równość:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n = 2^n(2n-1)!!$$

3. Uzasadnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność:

$$[2a]+[2b] \geq [a]+[b]+[a+b]$$

gdzie symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od *x*.

4. Rozwiąż układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich:

$$\begin{cases} xy+1=2y \\ yz+1=2z \\ zx+1=2x \end{cases}$$

5. W trójkącie ostrokątnym *ABC* poprowadzono z wierzchołka *C* wysokość *CD*. Wykaż, że jeśli $|AC|-|AB|=|AB|-|BC|=r$, to $|AD|-|BD|=4r$

Termin oddania 02.01.2024