



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**VI edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2018/19

IV etap

1. Środki czterech kół o promieniu a znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku długości a . Oblicz pole wspólnej części tych czterech kół.

2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x^3 + 4 = x^2(y + 3) \\ 2y^3 + 4 = y^2(z + 3) \\ 2z^3 + 4 = z^2(x + 3) \end{cases}$$

wiedząc, że x, y, z są liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

3. Udowodnij, że jeśli liczba naturalna n nie dzieli się przez 5, to $n^8 + 3n^4 - 4$ dzieli się przez 100.

4. Oblicz $\sin^2(2x)$, jeśli $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7$.

5. Niech h_1, h_2, h_3, h_4 będą wysokościami czworościanu, w który wpisano kulę o promieniu r . Wykaż, że $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geq 16r$.