



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

**VI edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

*rok szkolny 2018/19*

**V etap**

1. Rozwiązać równanie :

$$\frac{(x^2 - 1)(|x| + 1)}{x + \operatorname{sgn} x} = [x + 1]$$

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg arytmetyczny, którego wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) są równocześnie liczby  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  i  $\sqrt{7}$ .
3. Wykazać, że jeżeli na boku  $AB$  kwadratu  $ABCD$  zbudujemy trójkąt równoboczny  $ABZ$  tak, aby punkt  $Z$  leżał wewnątrz kwadratu, i poprowadzimy prostą  $CZ$  do przecięcia z bokiem  $AD$  w punkcie  $X$ , a następnie weźmiemy punkt  $Y$  jako symetryczny do  $X$  względem prostej  $AC$ , to trójkąt  $CXY$  jest trójkątem równobocznym wpisanym w kwadrat  $ABCD$ .
4. W kulę o promieniu  $R$  wpisano stożek ścięty. Podstawy tego stożka odcinają z kuli dwa odcinki kuliste. W przekroju osiowym łukom tych odcinków odpowiadają kąty środkowe  $\alpha$  oraz  $\beta$ . Znaleźć pole powierzchni bocznej tego stożka ściętego
5. Udowodnić, że  $n$  okręgów leżących na płaszczyźnie dzieli ją na części, które mogą być pomalowane dwoma różnymi kolorami w taki sposób, że dwie sąsiednie części (tzn. części mające wspólny brzeg różny od punktu na tym samym okręgu) będą pomalowane różnymi kolorami.

Termin oddania 28.02.2019