UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

IX edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2021/22

III etap

1. Jeśli w zbiorze A są określone dwa działania $\odot$ oraz $\oplus$ spełniające warunki:

$\forall a,b,c \in A \;\; a\oplus(b\odot c)=(a\oplus b)\odot(a\oplus c)$ oraz $\forall a,b,c \in A \;\; (a\odot b)\oplus c=(a\oplus c)\odot(b\oplus c)$

to działanie $\oplus$ nazywamy rozdzielnym względem działania $\odot$.

W zbiorze dzielników naturalnych liczby 6 określamy działania Δ oraz $\square$ w następujący sposób: $a\,\Delta\, b = NWW(a,b)$ oraz $a \,\square\, b = NWD(a,b)$. Zbadaj, czy działanie Δ jest rozdzielne względem $\square$. Zbadaj, czy działanie $\square$ jest rozdzielne względem Δ.

2. Dla jakich wartości parametru m układ równań $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m \end{cases}$

nie ma rozwiązań lub ma dokładnie jedno rozwiązanie (w przypadku istnienia rozwiązania podaj je).

3. Przez wierzchołek A kwadratu ABCD poprowadzono prostą przecinającą przedłużenia boków BC i CD w punktach M i N. Udowodnij, że

$$\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|AN|^2}=\frac{1}{|AB|^2}$$

4. Wykaż, że jeśli $a,b,c,x>1$ to $\log_a x+\log_b x+\log_c x \ge 9\log_{abc} x$.

5. Niech h_1,h_2,h_3 będą wysokościami trójkąta o polu S oraz p jest połową obwodu trójkąta. Wykaż, że $h_1h_2h_3 \le pS$.

Termin oddania 03.01.2022.